

Об оптимальной организации систем нагрева и охлаждения

А. М. Цирлин^{1,*} А. А. Ахременков^{1,**}

¹*Исследовательский центр системного анализа ИПС им. А.К. Айламазяна РАН*

Рассмотрены задачи о предельных возможностях и оптимальной организации систем нагрева и охлаждения с одним нагреваемым потоком. Найдено минимальное возможное производство энтропии в таких системах, и получены условия, необходимые для достижения этой оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Расчету систем теплообмена посвящена обширная литература (см. [1–7]) и др. В большинстве своем эти работы основаны на эвристических алгоритмах, а значит не позволяют получить количественные показатели возможности усовершенствования проектируемой системы. В работе [8] получена оценка снизу для диссипации в системах многопоточного теплообмена с заданной тепловой нагрузкой и суммарным коэффициентом теплообмена, а так же организация системы, реализующая эту оценку. Показано, что для законов теплообмена, линейных относительно разности температур нижняя граница может быть достигнута, если посредством распределении поверхности и тепловой нагрузки между теплообменниками, выбора входных температур и водяных эквивалентов удалось выполнить два условия:

- отношение абсолютных температур контактирующих потоков (устройств) в каждой точке должно быть одинаково;
- температуры потоков, покидающих теплообменник, должны быть одинаковы.

Системы охлаждения отличаются от систем теплообмена тем, что для каждого i -го охлаждаемого устройства задан отбираемый тепловой поток q_i и рабочая температура T_i , требуется передать от охлаждаемых устройств к хладагенту некоторый суммарный поток теплоты q так, чтобы поверхность охлаждения (размеры системы) и расход хладагента g не превышали некоторого значения, температура хладагента на входе в

* Electronic address: tsirlin@sarc.botik.ru

** Electronic address: andrei@eco.botik.ru

систему T_0 была не ниже заданной. Задачи, аналогичные рассмотренным, возникают применительно к системам, целью которых является не охлаждение, а подогрев некоторого комплекса устройств. Ниже для определенности мы будем рассматривать системы охлаждения. Такие задачи в химической технологии возникают при утилизации тепла, глубоком охлаждении потока в криогенных системах и пр.

Оптимальная организация системы предполагает:

- распределение ограниченной поверхности контакта между отдельными охлаждаемыми устройствами;
- выбор последовательности контактов хладагента с охлаждаемыми устройствами;
- выбор значений T_0 , расхода хладагента g , суммарной поверхности теплообмена.

Прежде чем переходить к решению этих задач проанализируем связь между переменными, характеризующими систему, и производством энтропии (диссипацией) σ . Эта связь показывает, что улучшение „естественных показателей“ функционирования системы монотонно связано с σ , что позволяет формулировать задачу оптимальной организации системы охлаждения как задачу о минимуме диссипации.

Второй раздел посвящен решению задачи о минимальной необратимости для простейших структур и системы общего вида.

Наконец, в третьем разделе рассмотрена система охлаждения платы суперкомпьютера и алгоритм расчета системы охлаждения, близкой к оптимальной.

1. СВЯЗЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОДСТВОМ ЭНТРОПИИ

Будем считать заданными тепловые нагрузки и рабочие температуры охлаждающих устройств $q_i, T_i, i = 1, 2, \dots, n$, а так же предполагать, что хладагент поступает и выходит из системы одним потоком с температурой на входе T_0 , на выходе T_f и водяным эквивалентом $W = gC$. Таким образом, мы предполагаем теплоемкость хладагента C неизменной. Внутри системы поток хладагента может разветвляться и перемешиваться.

Запишем уравнения термодинамических балансов системы [9].

—Энергетический баланс

$$W(T_f - T_0) = \sum_{i=1}^n q_i = q, \quad (1)$$

—Энтропийный баланс

$$W \ln \frac{T_f}{T_0} = \sigma = \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{T_{si}} - \frac{1}{T_i} \right). \quad (2)$$

Здесь T_{si} - эффективная абсолютная температура хладагента при контакте с i - ой охлаждаемой системой. При фиксированной тепловой нагрузке q

$$T_f = T_0 + \frac{q}{W} \quad (3)$$

и условие(2) примет вид

$$W \ln \left(1 + \frac{q}{T_0 W} \right) = \sigma. \quad (4)$$

Рост σ приводит либо к росту водяного эквивалента хладагента при заданной его входной температуре T_0 , либо к уменьшению его температуры T_0 при заданном значении водяного эквивалента W . И то и другое нежелательно, так как хладагент в свою очередь поступает во внешний теплообменник, где охлаждается (обычно потоком воздуха в радиаторе либо в градирне) от температуры T_f до T_0 . Чем больше W или чем ниже T_0 , тем больше энергии надо затратить во внешнем теплообменнике. Так что минимизация σ является естественным притерием качества организации системы.

Как следует из (2), величина σ целиком определяется значениями температур T_{si} , от которых зависят тепловые потоки q_i и движущие силы.

2. УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ

Пусть тепловые потоки пропорциональны разности температур

$$q_i = \alpha_i (T_i - T_{si}), \quad (5)$$

где α_i - коэффициент теплообмена, пропорциональный поверхности контакта s_i i -го охлаждаемого устройства с хладагентом.

Так как коэффициент пропорциональности между α_i и s_i одинаков для всех i , ограничения на суммарную площадь эквивалентны ограничению на сумму α_i , так что

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha. \quad (6)$$

Из равенства (5) следует, что

$$T_{si} = T_i - \frac{q_i}{\alpha_i}, \quad (7)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{\alpha_i}{T_i \alpha_i - q_i} - \frac{1}{T_i} \right) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha_i). \quad (8)$$

Найдем минимум σ по $\alpha_i > 0$, при условии (6). Функция Лагранжа этой задачи сепарабельна

$$L = \sum_i (\sigma_i(\alpha_i) + \lambda^2 \alpha_i). \quad (9)$$

Условие ее стационарности по α_i приводит к выражению

$$\frac{q_i^2}{(T_i \alpha_i - q_i)^2} = \lambda^2, i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

или

$$q_i(1 + \lambda) = T_i \alpha_i \Rightarrow \alpha_i^* = \frac{q_i}{T_i}(1 + \lambda). \quad (11)$$

С учетом ограничения (6), получим для распределения поверхностей контакта соотношения

$$\alpha_i^* = \alpha \frac{\frac{q_i}{T_i}}{\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{T_j}}. \quad (12)$$

Это условие приводит к эквивалентному требованию для температур хладагента, которые соответствуют оптимальному распределению поверхности

$$T_{si} = T_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{T_j}}{\alpha} \right) = T_i m(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Таким образом мы получили условия организации процесса охлаждения, к реализации которых следует стремиться.

Отметим, что в любой точке контакта отношение температур $\frac{T_{si}}{T_i}$ постоянно и равно

$$m(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{T_j} < 1, \quad (14)$$

что соответствует принципам организации оптимального теплообмена, полученным в [8].

Найдем минимум σ , соответствующий условиям (12), (13). Для этого подставим в равенство (2) $T_{si} = T_i m(\alpha)$, получим

$$\sigma_{min} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} \left(\frac{1}{m(\alpha)} - 1 \right). \quad (15)$$

Величины диссипации меньшей чем σ_{min} невозможно достичь, поэтому неравенство

$$W \ln \left(1 + \frac{q}{T_0 W} \right) \geq \sigma_{min}. \quad (16)$$

выделяет реализуемые системы охлаждения. Граница множества реализуемости соответствует равенству в (16), которое с учетом вида $m(\alpha)$, примет форму

$$W \ln \left(1 + \frac{q}{T_0 W} \right) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} \right)^2}{\alpha - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i}}. \quad (17)$$

При фиксированных значениях q_i и T_i величина $\alpha_{min}(W)$ равна

$$\alpha_{min}(W) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} \right)^2}{W \ln \left(1 + \frac{q}{T_0 W} \right)}. \quad (18)$$

Отметим, что $\alpha_{min}(W)$ при $W \rightarrow \infty$ предел выражения (18) равен

$$\alpha_{min} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} + \frac{T_0}{q} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{T_i} \right)^2. \quad (19)$$

На (рис.1) приведена зависимость $\alpha_{min}(W)$ для следующих данных

$$q_1 = 200 \text{Вт}, q_2 = 220 \text{Вт}, T_0 = 293 \text{К}, T_1 = 323 \text{К}, T_2 = 310 \text{К}, W = [30, 55]$$

Для реализуемых систем охлаждения значения α лежат выше построенной кривой (заштрихованная область). В том частном случае, когда температуры охлаждаемых систем одинаковы ($T_1 = T_2 = \dots = T_n = T$), температуры хладагента так же должны быть одинаковы и равны $T_s = Tm(\alpha)$.

Выясним, к чему приводят полученные условия для различных структур движения хладагента.

Последовательная структура (рис.2). Условие реализуемости требований минимальной диссипации в предположении, что эффективная температура контакта T_{si} равна средней из входной и выходной температур хладагента, примет форму

$$\frac{T_{s1}}{T_1} = \frac{T_{s2}}{T_2} = m(\alpha), \quad (20)$$

или

$$\frac{T_0 + \frac{q_1}{2W}}{T_1} = \frac{T_0 + \frac{q_1}{W} + \frac{q_2}{2W}}{T_2} = 1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} \right). \quad (21)$$

Выразим $T_0(W), \alpha(W)$ из равенства (21)

$$T_0(W) = \frac{T_1 T_2}{2(T_2 - T_1)W} \left(\frac{2q_1 + q_2}{T_2} - \frac{q_1}{T_1} \right), \quad (22)$$

$$\alpha(W) = \frac{q_1 + T_1 \frac{q_2}{T_2}}{T_1 - T_0(W) - \frac{q_1}{2W}}. \quad (23)$$

При этом $T_2 > T_1$, и при их сближении $W^* \rightarrow \infty$. Значения α_i^* выбирают по условию (12).

На (рис.3), (рис.4) приведен график зависимости $T_0(W)$, $\alpha(W)$ для следующих данных

$$q_1 = 200\text{Вт}, q_2 = 220\text{Вт}, T_1 = 323\text{К}.$$

В том случае, когда хладагент проходит последовательно k охлаждаемых устройств $T_1 < T_2 < T_3 \dots$, температуры контакта, соответствующие минимуму диссипации, должны иметь вид

$$T_{si} = \left(T_0 + \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{i-1} q_j \right) \left(1 + \frac{q_i}{2W} \right), i = 1, 2, \dots, k, \quad (24)$$

а условия (21) примут форму k равенств

$$\frac{T_{s1}}{T_1} = \frac{T_{s2}}{T_2} = \dots = \frac{T_{sk}}{k} = m(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^k \frac{q_j}{T_j}, \quad (25)$$

удовлетворить которым при $k > 3$ в общем случае невозможно. Это означает, что нужно использовать параллельную схему контакта.

Параллельная структура (рис.5). Схема с параллельным контактом дает большие возможности удовлетворить требованиям минимальной диссипации, чем схема (рис.2), так как здесь можно выбирать каждый из водяных эквивалентов W_i .

Для k параллельных охлаждаемых устройств аналог условий (25) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{T_0}{T_1} \left(1 + \frac{q_1}{2W_1} \right) = \frac{T_0}{T_2} \left(1 + \frac{q_2}{2W_2} \right) = \dots = \frac{T_0}{T_k} \left(1 + \frac{q_k}{2W_k} \right) = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{T_i}, \\ \sum_{i=1}^k W_i = W. \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом $(k+3)$ искомым переменных связаны друг с другом $(k+1)$ -м уравнением, число степеней свободы равно двум. В случае, когда любые две температуры охлаждаемых устройств одинаковы ($T_1 = T_2$), единственным способом удовлетворить условия минимальной диссипации является использование параллельной структуры контакта.

При этом

$$1 + \frac{q_1}{2W_1} = 1 + \frac{q_2}{2W_2} = \frac{T}{T_0} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{T_i} \right). \quad (27)$$

Откуда следует, что нужно выбирать водяной эквивалент пропорциональным водяному потоку

$$W_i = r q_i.$$

Коэффициент пропорциональности r легко находят из (27).

Отметим, что из условий (26) следует, что все температуры хладагента на выходе из зон контакта T_{pi} должны быть одинаковы и равны T_f , что так же соответствует принципам организации оптимального теплообмена [8].

Общий случай. В общем случае система охлаждения включает узлы параллельной и последовательной структуры, каждый из которых может состоять из нескольких охлаждаемых устройств. Для каждого узла последовательной структуры выполнение условий минимальной диссипации приводит к требования типа (21), в которых вместо температуры T_0 стоит температура хладагента на входе узла $T_{u0}(T_0, W)$. При этом в правой части стоит величина $m(\alpha)$ одна и та же для каждого охлаждаемого устройства в каждом из узлов. Переменные T_0, α входят в условия минимальной диссипации для каждого узла, и реализовать эти условия в узле последовательной структуры можно лишь в случае, когда в нем число устройств либо узлов параллельной структуры равно двум (рис.6).

Условия минимальной диссипации приводят к уравнениям, общее число которых равно числу охлаждаемых устройств. Число же переменных, подлежащих выбору, равно числу параллельных ветвей на (рис.6) (этих ветвей пять) минус число последовательно соединенных узлов на (рис.6) (их два) и плюс три переменных (α, W, T_0) общих для всей системы. Так что для схемы (рис.6) число степеней свободы равно $(5+3)-5-2=1$.

3. СИСТЕМА ОХЛАЖДЕНИЯ ПЛАТЫ СУПЕРКОМПЬЮТЕРА

В качестве иллюстративного примера использования полученных условий приведем расчет системы охлаждения платы суперкомпьютера. На плате имеется множество тепловыделяющих устройств, которые делятся на три группы:

1. процессоры — элементы с тепловыделением $q_2=95$ Вт, работающие при номинальной температуре $T_2=323$ К;

2. модуль памяти — элементы с тепловыделением $q_1=70$ Вт и номинальной температурой $T_1=313$ К;
3. модули питания и вспомогательные устройства — множество элементов с малым тепловыделением от 2 до 30 Вт.

На плате находятся два процессора и два модуля памяти — основные источники теплоты. Модули питания распределены по всей плате. Поскольку данные устройства невозможно выделить в одну группу для организации охлаждения, считаем, что их тепловая нагрузка равномерно распределена между процессорами и модулями памяти. Система охлаждения в этом случае состоит из двух параллельных ветвей, на каждой из которой последовательно расположен модуль памяти и процессор (рис.7). Поскольку тепловые нагрузки и температуры модулей равны, то поток хладагента между параллельными ветвями делится поровну $W_1 = W_2 = 0.5W$, температуры на выходе параллельных ветвей одинаковы. Найдем оптимальное значение температуры хладагента и коэффициента теплопередачи, для одной ветви теплообмена по формуле (22), (23)

$$T_0^* = 288,85 \text{ K}, \quad \alpha^* = 8.47 \text{ Вт/К}, \quad \alpha_1^* = 3.9 \text{ Вт/К}, \quad \alpha_2^* = 4.57 \text{ Вт/К}.$$

Знание удельных коэффициентов теплопереноса позволяет найти оптимальные площади контакта каждого из охлаждаемых устройств с хладагентом, пропорциональные отношению мощности охлаждаемого устройства к его температуре по Кельвину.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При проектировании термодинамически-оптимальных систем охлаждения, следует выбирать поверхности охлаждения и структуру потоков хладагента, руководствуясь теми же двумя принципами, которые справедливы в системах многопоточного теплообмена:

- отношение абсолютных температур охлаждаемых устройств и хладагента должно быть одинаково для каждого из устройств;
- температуры потоков хладагента в точке их слияния должны быть одинаковы.

Если эти условия выполнены, то увеличить поток отбираемой теплоты можно лишь за счет увеличения общей поверхности контакта (коэффициента теплообмена), сниже-

ния температуры хладагента на входе в систему либо за счет увеличения его водяного эквивалента.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- q - поток теплоты, Вт;
 T - температура, К;
 g - расход хладагента, л/с;
 σ - производство энтропии, Дж/К;
 W - водяной эквивалент, Вт/К;
 α - коэффициент теплообмена, Вт/К;
 s - площадь контакта, м²;

-
1. *Кафаров В.В., Мешалкин В.П., Перов В.Л.* // Математические основы автоматизированного проектирования химических производств. Химия: Москва, 1979
 2. *Каневец Г.Е.* // Проектирование и оптимизация теплообменных аппаратов на ЭЦВМ., АНУССР:Киев, 1970
 3. *Мухленов И.П.* // Химико-технологические системы. , Химия: Ленинград, 1986
 4. *Bosnjakovic, F.* // Technical Thermodynamics. , Holt R&W: New York, 1965
 5. *S. Sieniutycz, J. Jezowski* // Energy Optimization in Process Systems, Elsevier LTD:UK, 2009
 6. *Hartmann K., Hacker I., Rockstroh L.* // Modelierung und optimierung verfahrenstechnischer systeme., Akademie – Verlaq: Berlin, 1978
 7. *Цирлин А.М.* // Оптимальное управление необратимыми процессами тепло и массоперенос, Известия АН СССР, Техническая кибернетика, **2**, 171-179, 1991
 8. *Цирлин А.М., Ахременков А.А., Григорьевский И.Н.* // Минимальная необратимость, оптимальное распределение поверхности и тепловой нагрузки теплообменных систем, Теоретические основы химической технологии, **42**, 1-8, 2008
 9. *Berry R.S., Kasakov V.A., Sieniutycz S., Szwast Z., Tsirlin A.M.* // Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes, Wiley: Chichester, 1999

ABOUT OPTIMAL ORGANIZATION OF HEATING AND COOLING SYSTEM

A.M.Tsirlin, A.A. Akhremenkov

Thermodynamical analyze of heating and cooling system is considering in this paper with one heat flow. We get minimal entropy production for these systems and get conditions to rich this bound.

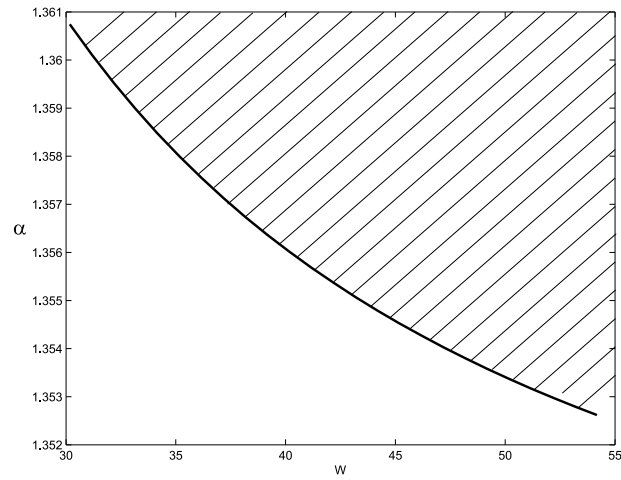


Рис. 1. Зависимость минимального коэффициента теплообмена от водяного эквивалента хладагента

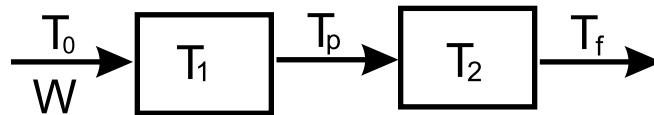


Рис. 2. Последовательная структура контакта охлаждаемых устройств с хладагентом

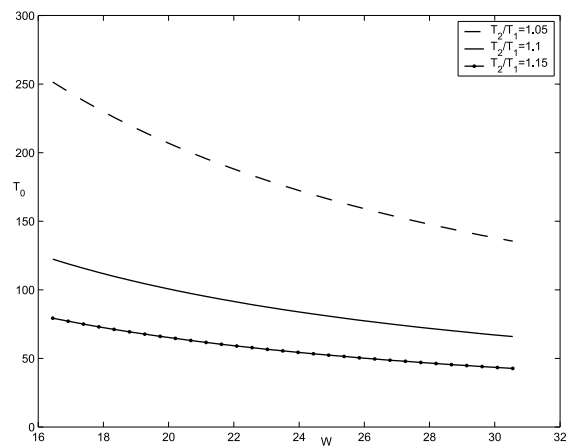


Рис. 3. Зависимость входной температуры хладагента от водяного эквивалента потока

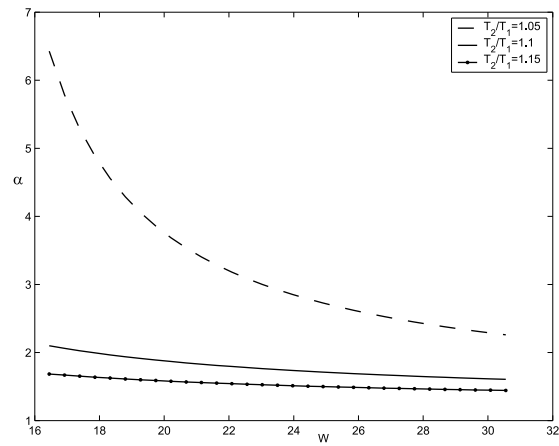


Рис. 4. Зависимость суммарного минимального коэффициента теплообмена от водяного эквивалента потока

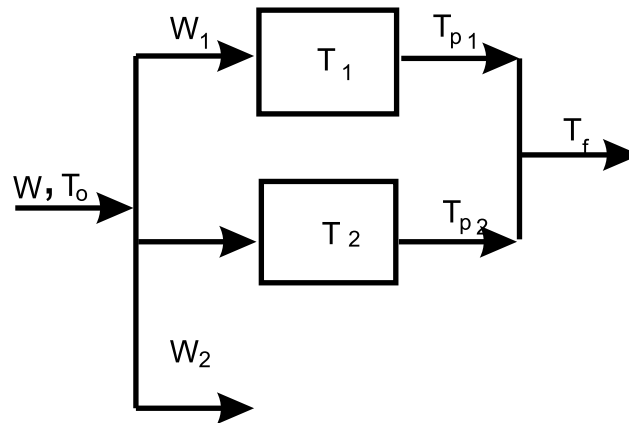


Рис. 5. Параллельная структура контакта охлаждаемых устройств с хладагентом

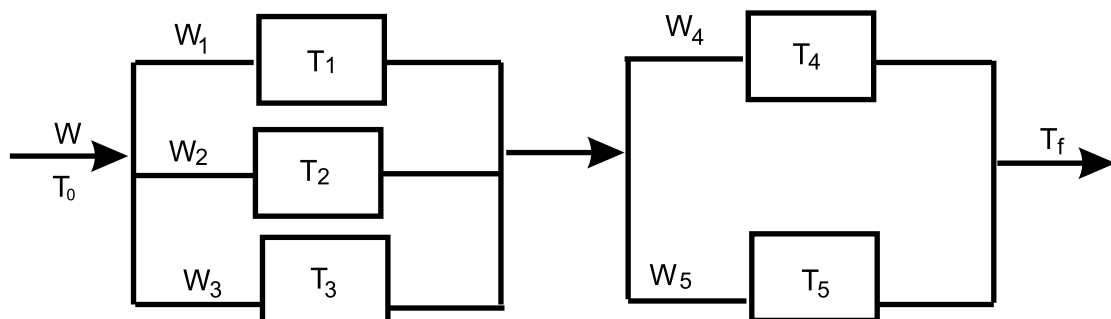


Рис. 6. Узлы охлаждения с параллельной и последовательной структурой

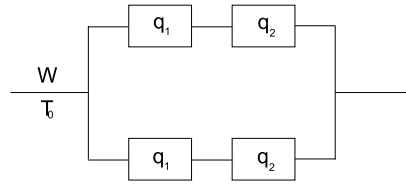


Рис. 7. Структура потоков системы охлаждения платы суперкомпьютера